Проблемы физики, математики и техники, № 1 (18), 2014

МАТЕМАТИКА

УДК 917.925

ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЯТОГО ПОРЯДКА

Г.Т. Можджер

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь

THE FIRST INTEGRALS OF THE FIFTH ORDER NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

G.T. Mozhdzher

Y. Kupala Grodno State University, Grodno, Belarus

Объектом исследования является нелинейное дифференциальное уравнение пятого порядка с рациональной правой частью. Целью исследования является нахождение условий существования первых интегралов у рассматриваемого уравнения и изучение аналитических свойств полученных первых интегралов. В основной части для нелинейного дифференциального уравнения пятого порядка получены: уравнение для вычетов и резонансное уравнение. В зависимости от корней резонансного уравнения найдены достаточные условия наличия первых интегралов рассматриваемого нелинейного дифференциального уравнения пятого порядка с рациональной правой частью. Для этих дифференциальных уравнений приведены первые интегралы в рассмотренных в данной работе случаях. Полученные результаты могут быть использованы в аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: *дифференциальное уравнение пятого порядка, первый интеграл, резонансы, уравнение для вычетов, характеристическое уравнение.*

The object of study is a nonlinear fifth-order differential equation with a rational right-hand side. The goal of the study is to find the conditions for the existence of the first integrals of the equation and study the analytical properties of the obtained first integrals. In main part of the nonlinear differential fifth-order equation obtained the equations for residues and the resonance equation. Depending on the roots of the resonance equation, the necessary conditions of existence of the first integrals of nonlinear differential equation of the fifth order with a rational right-hand side is found. For these differential equation corresponding first integrals considered in this paper special cases are given. The obtained results can be used in the analytical theory of the ordinary differential equations.

Keywords: *differential equation of the fifth order, first integral, resonances, equation for residues, characteristic equation.*

Введение

Рассмотрим дифференциальное уравнение пятого порядка с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} y^{V} &= a_1\frac{y'y^{IV}}{y}+a_2\frac{y''y'''}{y}+a_3\frac{y'^2y'''}{y^2}+\\ &+a_4\frac{y'y''^2}{y^2}+a_5\frac{y'^3y''}{y^3}+a_6\frac{y'^5}{y^4}+\\ &+a_7yy^{IV}+a_8y'y'''+a_9y''^2+a_{10}\frac{y'^2y''}{y}+\\ &+a_{11}\frac{y'^4}{y^2}+a_{12}y^2y'''+a_{13}yy'y''+a_{14}y'^3+\\ &+a_{15}y^3y''+a_{16}y^2y'^2+a_{17}y^4y'+a_{18}y^6. \end{aligned} \tag{0.1}$$

Найдем условия, при которых уравнение (0.1) имеет первый интеграл.

Упрощенным к уравнению (0.1) является уравнение

$$\begin{aligned} y^{V} &= a_1\frac{y'y^{IV}}{y}+a_2\frac{y''y'''}{y}+a_3\frac{y'^2y'''}{y^2}+\\ &+a_4\frac{y'y''^2}{y^2}+a_5\frac{y'^3y''}{y^3}+a_6\frac{y'^5}{y^4}. \end{aligned} \tag{0.2}$$

Решение уравнения (0.2) можно представить в виде ряда

$$y=h_0\tau^{-s}+\ldots+h_r\tau^{r-s}+\ldots,\ \tau=z-z_0,\quad s\neq 0,\ h_0\neq 0. \tag{0.3}$$

Для данного уравнения (0.1) характеристический многочлен $\varphi(\lambda)$ имеет вид [1]

$$\begin{gathered}\varphi(\lambda)=24\lambda^4+(6a_1+2a_2+46)\lambda^3+\\ +(7a_1+a_2-2a_3-a_4+29)\lambda^2+\\ +(2a_1-a_3+a_5+6)\lambda-a_6=0.\end{gathered}$$

Отсюда

$$\begin{gathered} 6a_1+2a_2+46=-24(\alpha+\beta+\gamma+\delta),\\ 7a_1+a_2-2a_3-a_4+29=\\ =24(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma+\alpha\delta+\beta\delta+\gamma\delta),\\ 2a_1-a_3+a_5+6=\\ =-24(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta),\\ a_6=-24\alpha\beta\gamma\delta, \end{gathered}$$

где $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ – корни характеристического многочлена $\varphi(\lambda)$.

В работе [1] показано, что при

$$a_1=a-(4\alpha+3),\ \ a_2=a+2b,$$

$$a_3 = c + (4\alpha + 2)a,\ a_4 = 2c + (4\alpha + 2)b,$$
$$a_5 = 4d + (4\alpha + 1)c,\ a_6 = 4d\alpha, \quad (0.4)$$

где
$$b = 2a + 10\alpha + 5,$$
$$d = \alpha(c - (4\alpha + 1)(a + 4\alpha + 2)), \quad (0.5)$$

уравнение (0.2) имеет первый интеграл вида
$$y^{4\alpha+3} y^{IV} = ay^{4\alpha+2} y' y''' + by^{4\alpha+2} y''^2 +$$
$$+ cy^{4\alpha+1} y'^2 y'' + dy^{4\alpha} y'^4 + H,$$

где H – постоянная интегрирования.

Если же
$$a_1 = a - (4\alpha + 3),$$
$$a_2 = a + 2b,$$
$$a_3 = c + (4\alpha + 2)a + 4p,$$
$$a_4 = 2c + (4\alpha + 2)b - 2p, \quad (0.6)$$
$$a_5 = 4d + (4\alpha + 1)c - 4p(a + 4\alpha + 2),$$
$$a_6 = \frac{d}{\alpha}(4\alpha^2 - p)$$

и b и d удовлетворяют (0.5), то уравнение (0.2) имеет первый интеграл вида
$$(y^{4\alpha+3} y^{IV} - ay^{4\alpha+2} y' y''' - by^{4\alpha+2} y''^2 -$$
$$- cy^{4\alpha+1} y'^2 y'' - dy^{4\alpha} y'^4)^2 =$$
$$= p\left(2y^{4\alpha+2} y' y''' - y^{4\alpha+2} y''^2 -\right.$$
$$\left.-2(a + 4\alpha + 2) y^{4\alpha+1} y'^2 y'' - \frac{d}{2\alpha} y^{4\alpha} y'^4\right)^2 + H,$$

где H – постоянная интегрирования.

1. Вывод характеристического уравнения и уравнения резонансов для уравнения (0.1)

Рассмотрим дифференциальное уравнение (0.1). Если решение уравнения (0.1) искать в виде ряда (0.3), то найдем, что $s = 1$. Тогда ряд (0.3) будет иметь вид
$$y = h_0 \tau^{-1} + \ldots + h_r \tau^{r-1} + \ldots,$$
$$\tau = z - z_0,\ h_0 \neq 0. \quad (1.1)$$

Подставляя (1.1) в (0.1) получим, что вычеты h_0 и резонансы r будут удовлетворять уравнениям
$$a_{18} h_0^5 - a_{17} h_0^4 + (2a_{15} + a_{16}) h_0^3 -$$
$$-(6a_{12} + 2a_{13} + a_{14}) h_0^2 +$$
$$+(24a_7 + 6a_8 + 4a_9 + 2a_{10} + a_{11}) h_0 + \quad (1.2)$$
$$+120 - 24a_1 - 12a_2 - 6a_3 - 4a_4 - 2a_5 - a_6 = 0,$$
$$(r + 1)(r^4 - Mr^3 + Kr^2 - Nr + G) = 0, \quad (1.3)$$

где
$$M = 16 - a_1 + a_7 h_0,$$
$$K = 101 - 11a_1 - 2a_2 - a_3 + (11a_7 + a_8) h_0 - a_{12} h_0^2,$$
$$N = 326 - 46a_1 - 20a_2 - 7a_3 - 4a_4 - a_5 +$$
$$+(46a_7 + 7a_8 + 4a_9 + a_{10}) h_0 -$$
$$-(7a_{12} + a_{13}) h_0^2 + a_{15} h_0^3, \quad (1.4)$$
$$G = 5(120 - 24a_1 - 12a_2 - 6a_3 - 4a_4 - 2a_5 - a_6) +$$
$$+4(24a_7 + 6a_8 + 4a_9 + 2a_{10} + a_{11}) h_0 -$$
$$-3(6a_{12} + 2a_{13} + a_{14}) h_0^2 + 2(2a_{15} + a_{16}) h_0^3 - a_{17} h_0^4.$$

Будем предполагать, что уравнения (1.2) и (1.3) не имеют кратных корней.

Рассмотрим следующие случаи:

1^0. $a_{18} \neq 0$;

2^0. $a_{18} = 0,\ a_{17} \neq 0$;

3^0. $a_{18} = a_{17} = 0,\ 2a_{15} + a_{16} \neq 0$;

4^0. $a_{18} = a_{17} = 0,$
$2a_{15} + a_{16} = 0,$
$6a_{12} + 2a_{13} + a_{14} \neq 0$;

5^0. $a_{18} = a_{17} = 0,$ (1.5)
$2a_{15} + a_{16} = 0,$
$6a_{12} + 2a_{13} + a_{14} = 0,$
$24a_7 + 6a_8 + 4a_9 + 2a_{10} + a_{11} \neq 0$;

6^0. $a_{18} = a_{17} = 0,$
$2a_{15} + a_{16} = 0,$
$6a_{12} + 2a_{13} + a_{14} = 0,$
$24a_7 + 6a_8 + 4a_9 + 2a_{10} + a_{11} = 0.$

2 Первые интегралы уравнения (0.1) *в случае* 1^0 *из* (1.5)

Пусть в уравнении (0.1) $a_{18} \neq 0$. Предположим, что имеют место соотношения (0.6). Тогда уравнение (1.2) примет вид
$$a_{18} h_0^5 - a_{17} h_0^4 + (2a_{15} + a_{16}) h_0^3 -$$
$$-(6a_{12} + 2a_{13} + a_{14}) h_0^2 +$$
$$+(24a_7 + 6a_8 + 4a_9 + 2a_{10} + a_{11}) h_0 + \quad (2.1)$$
$$+(4(\alpha + 2)^2 - p) \times$$
$$\times ((4\alpha - 7)(a + 4\alpha + 2) - c + 16) = 0.$$

Один из корней уравнения (2.1) будем считать равный двум, так как масштабным преобразованием искомой функции можно добиться желаемого результата.

Предположим, что левую часть уравнения (2.1) можно разложить на сомножители следующим образом
$$a_{18} h_0^5 - a_{17} h_0^4 + (2a_{15} + a_{16}) h_0^3 -$$
$$-(6a_{12} + 2a_{13} + a_{14}) h_0^2 +$$
$$+(24a_7 + 6a_8 + 4a_9 + 2a_{10} + a_{11}) h_0 + \quad (2.2)$$
$$+(4(\alpha + 2)^2 - p) \times$$
$$\times ((4\alpha - 7)(a + 4\alpha + 2) - c + 16) =$$
$$= -\frac{1}{96}(h_0 - 2)(ph_0^2 - 4ph_0 - 4(4(\alpha + 2)^2 - p)) \times$$
$$\times (nh_0^2 + 4nh_0 - 12((4\alpha - 7)(a + 4\alpha + 2) - c + 16)),$$

где
$$n = 80\alpha^2 + 96\alpha + 12a\alpha + 17a + c + 8.$$

Следовательно, будут иметь место следующие соотношения

$$a_{18} = -\frac{1}{96}np, \quad a_{17} = -\frac{1}{48}np,$$

$$2a_{15} + a_{16} =$$
$$= \frac{1}{24}(3p((4\alpha-7)(a+4\alpha+2)-c+16)+$$
$$+n(4(\alpha+2)^2+3p)),$$
$$6a_{12} + 2a_{13} + a_{14} =$$
$$= \frac{1}{12}(9p((4\alpha-7)(a+4\alpha+2)-c+16)- \quad (2.3)$$
$$-n(4(\alpha+2)^2-5p)),$$
$$24a_7 + 6a_8 + 4a_9 + 2a_{10} + a_{11} =$$
$$= -\frac{1}{6}(3(4(\alpha+2)^2-3p)((4\alpha-7)(a+4\alpha+2)-$$
$$-c+16)+2n(4(\alpha+2)^2-p)).$$

Уравнение (2.1) с учетом (2.2) примет вид

$$(h_0-2)(ph_0^2-4ph_0-4(4(\alpha+2)^2-p))\times \quad (2.4)$$
$$\times(nh_0^2+4nh_0-12((4\alpha-7)(a+4\alpha+2)-c+16))=0.$$

Тогда из (2.4) получим $h_0 - 2 = 0,$ или

$$ph_0^2-4ph_0-4(4(\alpha+2)^2-p)=0, \quad (2.5)$$

или

$$nh_0^2+4nh_0-12((4\alpha-7)(a+4\alpha+2)-c+16)=0.$$

Из (2.5) найдем

$$h_{01}+h_{02}=4, \quad h_{01}h_{02} = -\frac{4(4(\alpha+2)^2-p)}{p},$$

при этом $h_{01} \neq h_{02}$.

Если $r = 8\alpha+16$ является корнем уравнения резонансов (1.2) при h_{01} и h_{02}, взятых из (2.5), то имеем

$$(8\alpha+16)^4 - M_i(8\alpha+16)^3 + K_i(8\alpha+16)^2 -$$
$$-N_i(8\alpha+16)+G_i = 0, \quad i=1,2.$$

Следовательно, получим

$$-(M_1-M_2)(8\alpha+16)^3+(K_1-K_2)(8\alpha+16)^2-$$
$$-(N_1-N_2)(8\alpha+16)+(G_1-G_2)=0. \quad (2.6)$$

Учитывая, что $h_{01} \neq h_{02}$, (1.4), (2.3) и (2.5) из (2.6) найдем

$$a_{10} = -a_7((8\alpha+5)(8\alpha+16)+46)+a_8(8\alpha+9)-$$
$$-4a_9-4a_{12}(8\alpha+9)+4a_{13}-$$
$$-\frac{4}{p}a_{15}(4(\alpha+2)^2+3p)- \quad (2.7)$$
$$-\frac{1}{2}(\alpha+2)((4\alpha-7)(a+4\alpha+2)-c+16)+$$
$$+\frac{n}{6p}(\alpha+2)(4(\alpha+2)^2+7p).$$

Коэффициенты уравнения (1.3) можно записать в виде

$$M_i = p_i+q_i+m_i+8\alpha+16, \quad (2.8)$$
$$K_i = p_iq_i+p_im_i+q_im_i+(p_i+q_i+m_i)(8\alpha+16),$$
$$N_i = p_iq_im_i+(p_iq_i+p_im_i+q_im_i)(8\alpha+16),$$
$$G_i = p_iq_im_i(8\alpha+16),$$

где p_i, q_i, m_i – корни уравнения (1.3), отличные от -1 и $8\alpha+16, i=1,2.$

Из (1.4), (2.8) с учетом (0.6), (2.3) и (2.7) получим следующие соотношения

$$p_i+q_i+m_i = -a-4\alpha+3+a_7h_{0i},$$
$$p_iq_i+p_im_i+q_im_i =$$
$$= 2(16\alpha^2+22\alpha+33)+a(4\alpha-7)-c-4p-$$
$$-a_7(8\alpha+5)h_{0i}+a_8h_{0i}-a_{12}h_{0i}^2,$$
$$p_iq_im_i = -4(4(\alpha+2)^2-p)(a+12\alpha+13)-$$
$$-4a_{12}(8\alpha+9)h_{0i}+4a_{13}h_{0i}-$$
$$-\frac{4}{p}a_{15}(4(\alpha+2)^2+3p)h_{0i}-$$
$$-\frac{1}{2}(\alpha+2)((4\alpha-7)(a+4\alpha+2)-c+16)h_{0i}+$$
$$+\frac{1}{6p}n(\alpha+2)(4(\alpha+2)^2+7p)h_{0i}+$$
$$+a_{12}(8\alpha+9)h_{0i}^2-a_{13}h_{0i}^2+a_{15}h_{0i}^3,$$
$$\frac{1}{48}p(48p(4(\alpha+2)^2-p)\times$$
$$\times(464\alpha^2+1084\alpha+52a\alpha+29a-5c+842)-$$
$$-32(8n(\alpha+2)^4+4p(\alpha+2)^2\times$$
$$\times(464\alpha^2+498\alpha+72a\alpha+83a+4c+47)- \quad (2.9)$$
$$-p^2(304\alpha^2+12\alpha+60a\alpha-29a-7c+34)-$$
$$-48pa_{12}(\alpha+2)(8\alpha+9)+$$
$$+48pa_{13}(\alpha+2)-48a_{15}(\alpha+2)(4(\alpha+2)^2+3p))h_{0i}+$$
$$+24p(2n(\alpha+2)^2-$$
$$-p(272\alpha^2+150\alpha+48a\alpha+11a-2c+29)-$$
$$-16a_{12}(\alpha+2)(8\alpha+9)+$$
$$+16a_{13}(\alpha+2))h_{0i}^2+8p(2n(\alpha+2)^2+$$
$$+3p(8\alpha+5)(a+6\alpha+1)-$$
$$-48a_{15}(\alpha+2))h_{0i}^3+p^2nh_{0i}^4)=0.$$

Рассмотрим четвертое соотношение из (2.9). Если положить

$$a_7 = \frac{1}{2}(a+6\alpha+1),$$
$$a_8 = 4p,$$
$$a_9 = -2(\alpha+1)(a+6\alpha+1)-p,$$
$$a_{12} = p,$$
$$a_{13} = \frac{1}{3}(2\alpha+1)(4\alpha+3)(a+4\alpha+4)-$$
$$-\frac{1}{2}\alpha(4\alpha+1)(a+4\alpha+2)-$$
$$-\frac{1}{6}c(\alpha+2)-\frac{2}{3}a_7(8\alpha^2+29\alpha+20)-$$
$$-p(a+4\alpha+4+4a_7),$$

$$a_{15} = -\frac{1}{12}(2\alpha+1)(4\alpha+3)(a+4\alpha+4)+ + \frac{1}{8}\alpha(4\alpha+1)(a+4\alpha+2)+ + \frac{1}{24}c(\alpha+2)+\frac{1}{6}a_7(8\alpha^2+29\alpha+20)-a_7 p,$$

то четвертое соотношение из (2.9) с учетом (2.5) обратится в тождество.

Следовательно, соотношение (2.7) и последние три соотношения из (2.3) примут вид

$$a_{10} = \frac{3}{2}\alpha(4\alpha+1)(a+4\alpha+2)- -\frac{1}{2}(4\alpha+3)(4\alpha+4)(a+6\alpha+1)- -k(2\alpha+1)+\frac{1}{2}c(\alpha+2)-2p(3a+14\alpha+7),$$

$$a_{11} = \frac{1}{2}(4\alpha+1)(a+4\alpha+2)(\alpha(4\alpha+2)+p)- -\frac{2}{3}k((2\alpha+1)^2-p)+\frac{1}{6}c((\alpha+2)(4\alpha+2)-7p),$$

$$a_{14} = -\frac{1}{3}n(\alpha+1)(\alpha+2)+ +\frac{1}{6}p(2n+3(8\alpha+9)(a+6\alpha+1)-2c),$$

$$a_{16} = \frac{1}{12}n(\alpha+2)(2\alpha+3)+\frac{1}{4}p(8\alpha+9)(a+6\alpha+1),$$

где $k = 10\alpha+5+(4\alpha+4)(a+4\alpha+2)+ +(8\alpha+6)(a+6\alpha+1).$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned}
a_7 &= \frac{1}{2}(a+6\alpha+1),\\
a_8 &= 4p,\\
a_9 &= -2(\alpha+1)(a+6\alpha+1)-p,\\
a_{10} &= \frac{3}{2}\alpha(4\alpha+1)(a+4\alpha+2)-\\
&\quad -\frac{1}{2}(4\alpha+3)(4\alpha+4)(a+6\alpha+1)-\\
&\quad -k(2\alpha+1)+\frac{1}{2}c(\alpha+2)-\\
&\quad -2p(3a+14\alpha+7),\\
a_{11} &= \frac{1}{2}(4\alpha+1)(a+4\alpha+2)(\alpha(4\alpha+2)+p)-\\
&\quad -\frac{2}{3}k((2\alpha+1)^2-p)+\\
&\quad +\frac{1}{6}c((\alpha+2)(4\alpha+2)-7p),\\
a_{12} &= p,\\
a_{13} &= -\frac{1}{6}n(\alpha+2)-p(3a+16\alpha+6),\\
a_{14} &= -\frac{1}{3}n(\alpha+1)(\alpha+2)+\\
&\quad +\frac{1}{6}p(2n+3(8\alpha+9)(a+6\alpha+1)-2c),\\
a_{15} &= \frac{1}{24}n(\alpha+2)-\frac{1}{2}p(a+6\alpha+1),\\
a_{16} &= \frac{1}{12}n(\alpha+2)(2\alpha+3)+\\
&\quad +\frac{1}{4}p(8\alpha+9)(a+6\alpha+1),\\
a_{17} &= -\frac{1}{48}np, \quad a_{18} = -\frac{1}{96}np.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Умножая уравнение (0.1) на интегрирующий множитель

$$A = 2y^{4\alpha+3}\Big(y^{4\alpha+3}y^{IV} - ay^{4\alpha+2}y'y''' - -by^{4\alpha+2}y''^2 - cy^{4\alpha+1}y'^2y'' - dy^{4\alpha}y'^4 - -\frac{1}{2}(a+6\alpha+1)y^{4\alpha+4}y''' + +2(\alpha+1)(a+6\alpha+1)y^{4\alpha+3}y'y'' - -\Big(\frac{1}{2}\alpha(4\alpha+1)(a+4\alpha+2)- -\frac{1}{3}k(2\alpha+1)+\frac{1}{6}c(\alpha+2)\Big)y^{4\alpha+2}y'^3 + +\frac{1}{12}n(\alpha+2)y^{4\alpha+4}y'^2 - \frac{1}{24}n(\alpha+2)y^{4\alpha+6}y'\Big)$$

и интегрируя его с учетом (0.6) и (2.10), получим

$$\Big(y^{4\alpha+3}y^{IV} - ay^{4\alpha+2}y'y''' - by^{4\alpha+2}y''^2 - cy^{4\alpha+1}y'^2y'' - -dy^{4\alpha}y'^4 - \frac{1}{2}(a+6\alpha+1)y^{4\alpha+4}y''' + +2(\alpha+1)(a+6\alpha+1)y^{4\alpha+3}y'y'' - -\Big(\frac{1}{2}\alpha(4\alpha+1)(a+4\alpha+2)- -\frac{1}{3}k(2\alpha+1)+\frac{1}{6}c(\alpha+2)\Big)y^{4\alpha+2}y'^3 + +\frac{1}{12}n(\alpha+2)y^{4\alpha+4}y'^2 - \frac{1}{24}n(\alpha+2)y^{4\alpha+6}y'\Big)^2 = = p\Big(2y^{4\alpha+2}y'y''' - y^{4\alpha+2}y''^2 - -2(a+4\alpha+2)y^{4\alpha+1}y'^2y'' - -\frac{d}{2\alpha}y^{4\alpha}y'^4 + y^{4\alpha+4}y''' - (2a+10\alpha+5)y^{4\alpha+3}y'y'' + +\frac{1}{3}(k-c)y^{4\alpha+2}y'^3 - \frac{1}{2}(a+6\alpha+1)y^{4\alpha+5}y'' + +\frac{1}{4}(8\alpha+9)(a+6\alpha+1)y^{4\alpha+4}y'^2 - \frac{1}{96}ny^{4\alpha+8}\Big)^2 + H, \tag{2.11}$$

где H – постоянная интегрирования.

***Теорема* 2.1.** *Пусть коэффициенты уравнения* (0.1) *подчинены условиям* (0.6) *и* (2.10). *Если* $r = 8\alpha+16$ *является корнем уравнения* (1.3) *при*

h_{01} *и* h_{02} *из* (2.5), *то уравнение* (0.1) *имеет первый интеграл вида* (2.11).

3 Первые интегралы уравнения (0.1) *в случаях* $2^0 - 5^0$ *из* (1.5)

Пусть в уравнении (0.1) $a_{18} = 0, a_{17} \neq 0.$ Предположим, что имеют место соотношения (0.4). Тогда уравнение (1.2) будет иметь вид

$$\begin{gathered} a_{17}h_0^4 = (2a_{15} + a_{16})h_0^3 - (6a_{12} + 2a_{13} + a_{14})h_0^2 + \\ +(24a_7 + 6a_8 + 4a_9 + 2a_{10} + a_{11})h_0 + \\ +4(\alpha + 2)(24 - 6a - 4b - 2c - d). \end{gathered} \tag{3.1}$$

Предположим, что $r = 4\alpha + 8$ является общим корнем уравнения резонансов (1.3), при h_{0i}, $i = \overline{1,4}$ взятых из (1.2). При этом можно записать

$$\begin{gathered} -(M_1 - M_i)(4\alpha + 8)^3 + (K_1 - K_i)(4\alpha + 8)^2 - \\ -(N_1 - N_i)(4\alpha + 8) + (G_1 - G_i) = 0, \, i = \overline{2,4}. \end{gathered} \tag{3.2}$$

Из (3.2) при условии, что $h_{01} \neq h_{02}$, $h_{01} \neq h_{03}$, $h_{01} \neq h_{04}$ и (1.4), получим

$$\begin{gathered} (a_7(4\alpha + 4) - a_8)(16\alpha^2 + 36\alpha + 26) + \\ +4a_9(4\alpha + 5) + a_{10}(4\alpha + 2) - 3a_{11} + \\ +(a_{12}(4\alpha + 4)(4\alpha + 5) - \\ -a_{13}(4\alpha + 4) + 2a_{14})(h_{01} + h_{0i}) + \\ +(a_{15}(4\alpha + 6) - a_{16})(h_{01}^2 + h_{01}h_{0i} + h_{0i}^2) = 0, i = \overline{2,4}. \end{gathered} \tag{3.3}$$

Учитывая, что $h_{02} \neq h_{03}, h_{02} \neq h_{04}$, то будем иметь

$$\begin{gathered} a_{12}(4\alpha + 4)(4\alpha + 5) - a_{13}(4\alpha + 4) + 2a_{14} + \\ +(a_{15}(4\alpha + 6) - a_{16})(h_{01} + h_{02} + h_{0i}) = 0, i = \overline{3,4}. \end{gathered} \tag{3.4}$$

Так как $h_{03} \neq h_{04}$, то находим

$$a_{16} = a_{15}(4\alpha + 6). \tag{3.5}$$

Следовательно, из (3.4) получим

$$a_{12}(4\alpha + 4)(4\alpha + 5) - a_{13}(4\alpha + 4) + 2a_{14} = 0.$$

Положим $a_{14} = m(4\alpha + 4)$, тогда из последнего соотношения будем иметь

$$a_{13} = 2m + a_{12}(4\alpha + 5). \tag{3.6}$$

Учитывая (3.5) и (3.6) из (3.3) запишем

$$\begin{gathered} (a_7(4\alpha + 4) - a_8 + a_9)(16\alpha^2 + 36\alpha + 26) - \\ -a_9(4\alpha + 2)(4\alpha + 3) + a_{10}(4\alpha + 2) - 3a_{11} = 0. \end{gathered} \tag{3.7}$$

Пусть $a_8 = a_7(4\alpha + 4) + a_9$. Тогда соотношение (3.7) примет вид

$$a_9(4\alpha + 2)(4\alpha + 3) - a_{10}(4\alpha + 2) + 3a_{11} = 0.$$

Если положить $a_{11} = p(4\alpha + 2)$, то из последнего соотношения найдем

$$a_{10} = a_9(4\alpha + 3) + 3p.$$

Таким образом, получаем

$$\begin{gathered} a_8 = a_7(4\alpha + 4) + a_9, \\ a_{10} = a_9(4\alpha + 3) + 3p, \\ a_{11} = p(4\alpha + 2), \\ a_{13} = 2m + a_{12}(4\alpha + 5), \\ a_{14} = m(4\alpha + 4), \;\; a_{16} = a_{15}(4\alpha + 6). \end{gathered} \tag{3.8}$$

Умножая уравнение (0.1) с учетом (0.4) и (3.8) на интегрирующий множитель $A = y^{4\alpha+3}$ и интегрируя его, будем иметь

$$\begin{gathered} y^{4\alpha+3}y^{IV} = ay^{4\alpha+2}y'y''' + by^{4\alpha+2}y''^2 + cy^{4\alpha+1}y'^2y'' + \\ +dy^{4\alpha}y'^4 + a_7y^{4\alpha+4}y''' + a_9y^{4\alpha+3}y'y'' + py^{4\alpha+2}y'^3 + \\ +a_{12}y^{4\alpha+5}y'' + my^{4\alpha+4}y'^2 + \\ +a_{15}y^{4\alpha+6}y' + \frac{a_{17}}{4\alpha+8}y^{4\alpha+8} + H, \end{gathered} \tag{3.9}$$

где H – постоянная интегрирования.

***Теорема* 3.1.** *Пусть коэффициенты уравнения* (0.1) *подчинены условиям* $a_{18} = 0, a_{17} \neq 0,$ (0.4) *и* (3.8). *Если* $r = 4\alpha + 8$ *является корнем уравнения* (1.3) *при* h_{01}, h_{02}, h_{03} *и* h_{04} *взятых из* (3.1), *то первый интеграл уравнения* (0.1) *имеет вид* (3.9).

***Следствие* 3.1.**

1. *Если выполнены условия* 3^0 *из* (1.5), *то первый интеграл уравнения* (0.1) *имеет вид* (3.9) *при* $a_{17} = 0$.

2. *Если выполнены условия* 4^0 *из* (1.5), *то первый интеграл уравнения* (0.1) *имеет вид* (3.9) *при* $a_{15} = a_{17} = 0$.

3. *Если выполнены условия* 5^0 *из* (1.5), *то первый интеграл уравнения* (0.1) *имеет вид* (3.9) *при* $m = -2a_{12}, a_{15} = a_{17} = 0$.

4 Первые интегралы уравнения (0.1) *в случае* 6^0 *из* (1.5)

Пусть теперь в уравнении (0.1)

$$\begin{gathered} a_{18} = a_{17} = 0, a_{16} = -2a_{15}, \\ a_{14} = -6a_{12} - 2a_{13}, \\ a_{11} = -24a_7 - 6a_8 - 4a_9 - 2a_{10} \end{gathered} \tag{4.1}$$

и имеют место соотношения (0.4).

Тогда, если

$$(\alpha + 2)(24 - 6a - 4b - 2c - d) = 0,$$

то h_0 в (1.2) будет произвольным.

Предположим, что $r = 4\alpha + 8$ является корнем уравнения резонансов (1.3), отличным от -1 и 0. Отсюда, если $\alpha = -2$, то $r = 0$ и

$$\begin{gathered} a_1 = a + 5, a_2 = a + 2b, \\ a_3 = c - 6a, a_4 = 2c - 6b, \\ a_5 = 4d - 7c, a_6 = -8d. \end{gathered} \tag{4.2}$$

Если положить $a_9 = 0, a_8 = -4a_7$, то получим, что $a_{11} = -2a_{10}$.

Таким образом, получили

$$\begin{gathered} a_8 = -4a_7, a_9 = 0, \\ a_{11} = -2a_{10}, a_{14} = -6a_{12} - 2a_{13}, \\ a_{16} = -2a_{15}, a_{17} = a_{18} = 0. \end{gathered} \tag{4.3}$$

Умножая уравнение (0.1) с учетом (4.2) и (4.3) на интегрирующий множитель $A = y^{-5}$ и интегрируя его, будем иметь первый интеграл (3.9) при

$$\alpha=-2,\ a_9=0,\ p=\frac{a_{10}}{3},$$
$$m=\frac{3}{2}a_{12}+\frac{a_{13}}{2},\ a_{17}=0. \qquad (4.4)$$

Если же $d=24-6a-4b-2c$, то соотношения (0.4) примут вид

$$a_1=a-4\alpha-3,\ a_2=a+2b,$$
$$a_3=c+(4\alpha+2)a,\ a_4=2c+(4\alpha+2)b, \qquad (4.5)$$
$$a_5=96-24a-16b+(4\alpha-7)c,$$
$$a_6=4\alpha(24-6a-4b-2c).$$

Тогда в (1.4) получим $G=0$ и коэффициенты M,K,N будут

$$M=19+4\alpha-a+a_7h_0,$$
$$K=134+44\alpha-a(4\alpha+15)-$$
$$-4b-c+(11a_7+a_8)h_0-a_{12}h_0^2,$$
$$N=4(\alpha+2)(46-7a-4b-c)+ \qquad (4.6)$$
$$+(46a_7+7a_8+4a_9+a_{10})h_0-$$
$$-(7a_{12}+a_{13})h_0^2+a_{15}h_0^3.$$

Пусть p,q – корни уравнения (1.3) отличные от -1 и $4\alpha+8$. Тогда коэффициенты уравнения (1.3) можно записать в виде

$$M=p+q+4\alpha+8,$$
$$K=pq+(p+q)(4\alpha+8),$$
$$N=pq(4\alpha+8).$$

Отсюда с учетом (4.6) будем иметь

$$p+q=11-a+a_7h_0, \qquad (4.7)$$
$$pq=46-7a-4b-c-(a_7(4\alpha-3)-a_8)h_0-a_{12}h_0^2,$$
$$a_{15}h_0^3+(a_{12}(4\alpha+1)-a_{13})h_0^2+$$
$$+(a_7((4\alpha-3)(4\alpha+8)+46)-$$
$$-a_8(4\alpha+1)+4a_9+a_{10})h_0=0.$$

Так как $h_0\neq 0$, то из последнего соотношения в (4.7) получаем

$$a_{15}h_0^2+(a_{12}(4\alpha+1)-a_{13})h_0+$$
$$+a_7((4\alpha-3)(4\alpha+8)+46)-$$
$$-a_8(4\alpha+1)+4a_9+a_{10}=0.$$

Для того чтобы h_0 было произвольным, необходимо

$$a_{15}=0,\quad a_{12}(4\alpha+1)-a_{13}=0, \qquad (4.8)$$
$$a_7((4\alpha-3)(4\alpha+8)+46)-$$
$$-a_8(4\alpha+1)+4a_9+a_{10}=0.$$

Пусть

$$a_8=a_7(4\alpha+4)+a_9,$$

то второе и третье соотношения из (4.8) и третье и четвертое соотношения из (4.1) примут вид

$$a_{10}=-18a_7+a_9(4\alpha-3),$$
$$a_{11}=-2(4\alpha+2)(3a_7+a_9),$$
$$a_{13}=a_{12}(4\alpha+1),$$
$$a_{14}=-2a_{12}(4\alpha+4).$$

Таким образом, получили

$$a_8=a_7(4\alpha+4)+a_9,$$
$$a_{10}=-18a_7+a_9(4\alpha-3), \qquad (4.9)$$
$$a_{11}=-2(4\alpha+2)(3a_7+a_9),$$
$$a_{13}=a_{12}(4\alpha+1),$$
$$a_{14}=-2a_{12}(4\alpha+4),$$
$$a_{15}=a_{16}=a_{17}=a_{18}=0.$$

Умножая уравнение (0.1) с учетом (4.5) и (4.9) на интегрирующий множитель $A=y^{4\alpha+3}$ и интегрируя его, получим первый интеграл вида (3.9) при условии

$$a_{17}=a_{15}=0, p=-6a_7, m=-2a_{12}. \qquad (4.10)$$

***Теорема* 4.1.** *Пусть* $r=4\alpha+8$ *является корнем уравнения* (1.3) *и имеют место соотношения* 6^0 *из* (1.5). *Тогда*

1) *если в уравнении* (0.1) *коэффициенты подчинены условиям* (4.2) *и* (4.3), *то первый интеграл имеет вид* (3.9), *где надо считать, что имеет место* (4.4);

2) *если в уравнении* (0.1) *коэффициенты подчинены условиям* (4.5) *и* (4.9), *то первый интеграл имеет вид* (3.9), *где надо считать, что имеет место* (4.10).

Заключение

В работе найдены достаточные условия наличия первых интегралов дифференциального уравнения пятого порядка (0.1) в случаях (1.5).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мартынов, И.П.* О первых интегралах одного уравнения пятого порядка / И.П. Мартынов, Г.Т. Можджер // Вестник ГрГУ. Серия 2. – 2001. – № 2 (6). – С. 3–7.

Поступила в редакцию 14.11.13.